
JAMBI
U


Ilmu Tidak
Didapatkan
dengan Tubuh
yang Santai

Teknik Integral
Metode Substitusi dan Parsial

2021 Lisani,S.T.P.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Metode Substitusi

Metode Substitusi Adalah Metode Penyelesaian Integral dengan mengubah bentuk fungsi menjadi lbih sederhana dalam bentuk variable tertentu yang saling berhubungan dan ditandai dengan adalanya permisalan.

Metode Substitusi digunakan karena tidak semua fungsi dapat di Integralkan dengan Rumus Dasar/konsep dasar.

INTEGRAL SUBSTITUSI

- Suatu metode penyelesaian integral dengan cara mengganti/mensubstitusikan fungsi f(x) dengan simbol “U”.
- Syaratnya jika ada lebih dari 2 fungsi :

  “PILIH FUNGSI YANG PALING RUMIT/SUSAH UNTUK DIGANTI DENGAN **U**”

Berikut proses mengintegralkan fungsi dengan metode substitusi :

1. Misalkan salah satu fungsi sebagai u.
2. Turunkan fungsi u terhadap x
3. Bentuk hubungan keduanya (a dx = n du)
4. Substitusi fungsi pemisalan ke bentuk integral awal
5. Setelah diintegralkan, kembalikan fungsi pemisalan ke bentuk awalnya.

Lisani,S.T.P.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

CONTOH

1. $\int (2x+3)^4\, dx$

a. Pilih fungsi yang akan dipakai sebagai U.
Disini kita memilih/memakai (2x+3) sebagai fungsi yang akan kita ganti/substitusi dengan U.

U = (2x+3)

b. Cari nilai turunan dari fungsi U. Kemudian dari hasil turunan tersebut tentukan nilai dx.

U = (2x+3)

$$f(U) = \frac{du}{dx} = 2 \longrightarrow dx = \frac{du}{2}$$

c. Masukkan ke persamaan awal

$$\int (2x+3)^4 dx = \int U^4 \bullet \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int U^4 \bullet du$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

c. **Selesaikan persamaannya :**

$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{4+1} U^{4+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{5} U^{5} + C$$

$$= \frac{1}{10} U^{5} + C$$

$$= \frac{1}{10} (2x+3)^{5} + C$$

2. $\int 5(5x+3)^4 dx$

a. Pilih fungsi yang akan dipakai sebagai U.
Disini kita memilih/memakai (5x+3) sebagai fungsi yang akan kita ganti/substitusi dengan U.

$U = (5x+3)$

b. Cari nilai turunan dari fungsi U. Kemudian dari hasil turunan tersebut tentukan nilai dx.

$U = (5x+3)$

$$f(U) = \frac{du}{dx} = 5 \longrightarrow dx = \frac{du}{5}$$

c. Masukkan ke persamaan awal

$$\int 5(5x+3)^4 dx = \int 5 \bullet U^4 \bullet \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int 5 \bullet U^4\, du$$

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

c. **Selesaikan persamaannya :**

$$=\frac{1}{5}\bullet\frac{5}{4+1}U^{4+1}+C$$

$$=\frac{1}{5}\bullet\frac{5}{5}U^{5}+C$$

$$=\frac{5}{25}U^{5}+C$$

$$=\frac{1}{5}(5x+3)^{5}+C$$

3. Tentukan hasil integral di bawah ini :

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx$$

Pembahasan :

Misalkan : $u = 3x^2 + 9x - 1$

$$\frac{du}{dx} = 6x + 9$$

$(6x + 9)\,dx = du$

$3(2x + 3)\,dx = du$

$$(2x + 3)\,dx = \frac{1}{3}\,du$$

Substitusi u ke dalam integral :

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}du}{u^{1/2}}$$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx = \int \frac{1}{3}\,u^{-1/2}\,du$$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx = \frac{1/3}{1/2}\,u^{1/2} + c$$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx = \frac{2}{3}\,u^{1/2} + c$$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx = \frac{2}{3}\,(3x^2+9x-1)^{1/2} + c$$

4. Tentukan hasil dari $\int 4x^3 (x^4 - 1)^3 \, dx$.

Pembahasan :

Misalkan : $u = x^4 - 1$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$4x^3 \, dx = du$$

Substitusi u dalam integral :

$$\int 4x^3 (x^4 - 1)^3 \, dx = \int u^3 \, du$$

$$\int 4x^3 (x^4 - 1)^3 \, dx = \frac{1}{4} u^4 + c$$

$$\int 4x^3 (x^4 - 1)^3 \, dx = \frac{1}{4} (x^4 - 1)^4 + c$$

5. Tentukan hasil dari $\int 12x\,(x^2 + 1)^2\,dx$.

Pembahasan :

Misalkan : $u = x^2 + 1$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$2x\,dx = du$

$12x\,dx = 6\,du$

Substitusi u dalam integral :

$$\int 12x\,(x^2 + 1)^2\,dx = \int u^2\,6du$$

$$\int 12x\,(x^2 + 1)^2\,dx = \frac{6}{3}\,u^3 + c$$

$$\int 12x\,(x^2 + 1)^2\,dx = 2\,u^3 + c$$

$$\int 12x\,(x^2 + 1)^2\,dx = 2(x^2 + 1)^3 + c$$

6 Tentukan hasil dari $\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3\,dx$.

Pembahasan :

Misalkan : $u = x^2 - x + 3$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$(2x - 1)\,dx = du$

Substitusi u dalam integral :

$$\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3\,dx = \int u^3\,du$$

$$\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3\,dx = \frac{1}{4}u^4 + c$$

$$\int (2x - 1)(x^2 - x + 3)^3\,dx = \frac{1}{4}(x^2 - x + 3)^4 + c$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

LATIHAN DASAR

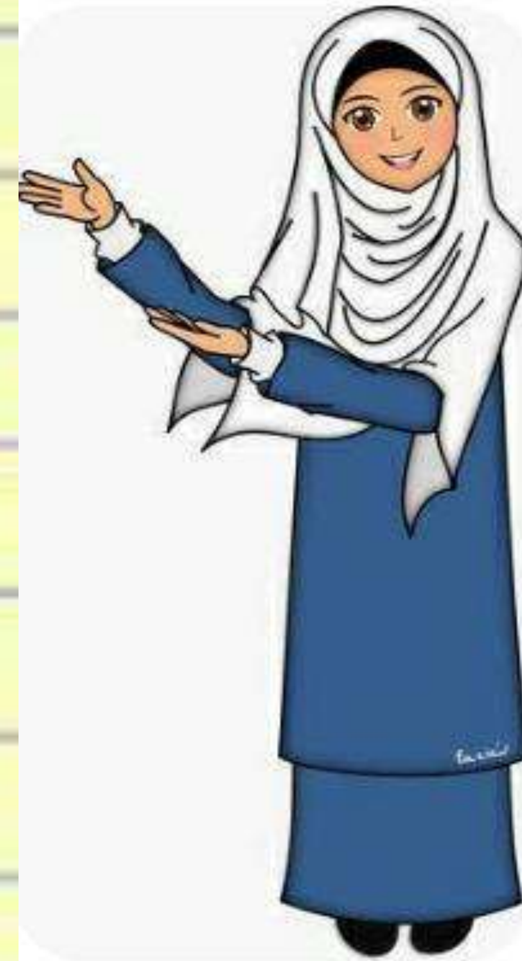
1. $\int (3x+4)^5\, dx$
2. $10\int (5x+3)^4\, dx$
3. $\int (3x+1)^5 \cdot 3dx$
4. $\int (x^2-4)^3 \cdot 2x \cdot dx$
5. $\int (5x^3-18)^7 \cdot 15x^2 \cdot dx$
6. $\int 3x^4(2x^5+9)^3\, dx$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

Ketika orang lain meragukanmu, yang harus kamu lakukan adalah percaya pada dirimu sendiri dan buktikan kemampuanmu

ekooe.blogspot.com



Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

INTEGRAL PARSIAL

$$\int U \cdot dv = U \cdot V - \int V \cdot du$$

Syarat umum yang harus dipenuhi :

a. Pilih fungsi yang paling sederhana untuk dipakai sebagai “U”.

b. Bagian yang dipilih sebagai “dv” harus dapat di integralkan.

c. $\int v \cdot du$ tidak boleh lebih sulit daripada $\int u \cdot dv$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

CONTOH

1. $\int 2x(3x-5)^6\,dx \longrightarrow \int U \cdot dv = U \cdot V - \int V \cdot du$

   a. **Pilih fungsi paling sederhana yang akan dipakai sebagai U. Disini kita memilih/memakai 2x sebagai fungsi yang akan kita ganti/substitusi dengan U .**

   $\boxed{U = 2x}$

   b. **Gunakan fungsi yang lainnya sebagai dv.**

   $\boxed{dv = (3x-5)^6}$

   c. **Karena dalam rumus kita juga butuh nilai du dan v maka kita cari nilai keduanya dengan :.**

   - **Turunkan $U = 2x$ maka** $f'(U) = \frac{du}{dx} = 2 \longrightarrow \boxed{du = 2dx}$

   - **Integralkan $dv = (3x-5)^6$ maka**

$$V = \int (3x-5)^6\,dx = \frac{1}{7}(3x-5)^7\,\frac{du}{3} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}(3x-5)^7 + C = \frac{1}{21}(3x-5)^7 + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

d. **Selesaikan persamaannya dengan menerapkan rumus :**

$$\int 2x(3x-5)^6 dx \qquad \int U \cdot dv = U \cdot V - \int V \cdot du$$

$$\int 2x(3x-5)^6 dx = 2x \cdot \frac{1}{21}(3x-5)^7 - \int \frac{1}{21}(3x-5)^7 \cdot 2dx$$

$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(3x-5)^8 + C$$

$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{2}{504}(3x-5)^8 + C$$

$$= \frac{2x}{21}(3x-5)^7 - \frac{1}{252}(3x-5)^8 + C$$

$\int \frac{x}{\sqrt{5x+7}}\,dx$

Misalkan :

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = (5x+7)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$v = \int dv$$

$$v = \int (5x+7)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(5x+7)^{-\frac{1}{2}+1} + C\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(2(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C\right)$$

$$= \frac{2}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

maka :

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x+7}}\,dx = \int u\,dv \Rightarrow uv - \int v\,du$$

$$= x\left(\frac{2}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + c_1\right) - \frac{2}{5}\int (5x+7)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + c_1 - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}(5x+7)^{\frac{3}{2}}\right) + c_1\right)$$

$$= \frac{2x}{5}(5x+7)^{\frac{1}{2}} + c_1 - \frac{4}{75}(5x+7)^{\frac{3}{2}} + c_2$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5x+7}\left[x - \frac{2}{15}(5x+7)\right] + C;\quad c_1 + c_2 = C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5x+7}\left[x - \frac{10x+14}{15}\right] + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5x+7}\left[\frac{15x-10x-14}{15}\right] + C$$

$$= \frac{2}{75}(5x-14)\sqrt{5x+7} + C$$

2. $\int x\sqrt{7x+8}\,dx$

Misalkan :

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = (7x+8)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$v = \int (7x+8)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}(7x+8)^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{21}(7x+8)^{\frac{3}{2}} + C$$

maka :

$$\int x\sqrt{7x+8}\,dx = \int u\,dv \Rightarrow uv - \int v\,du$$

$$= x\left(\frac{2}{21}(7x+8)^{\frac{3}{2}} + c_1\right) - \frac{2}{21}\int (7x+8)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2x}{21}(7x+8)^{\frac{3}{2}} + c_1 - \frac{2}{21}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{2}{5}(7x+8)^{\frac{5}{2}} + c_2\right)\right)$$

$$= \frac{2}{21}(7x+8)^{\frac{3}{2}}\left[x - \frac{2}{35}(7x+8)\right] + C; \quad c_1 + c_2 = C$$

$$= \frac{2}{21}(7x+8)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{35x - 14x - 16}{35}\right] + C$$

$$= \frac{2}{735}(7x+8)^{\frac{3}{2}}(21x-16) + C$$

3. $\int (2x-5)\sqrt{5x+2}\,dx$

Misalkan :

$$u = 2x+5$$

$$du = 2dx$$

$$dv = (5x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$v = \int (5x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}(5x+2)^{\frac{3}{2}} + c\right)$$

$$= \frac{2}{15}(5x+2)^{\frac{3}{2}} + c$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\int (2x+5)\sqrt{5x+2}\,dx = \int u\,dv \Rightarrow uv - \int v\,du$$

$$= (2x+5)\left(\frac{2}{15}(5x+2)^{\frac{3}{2}} + c_1\right) - \int\left(\frac{2}{15}(5x+2)^{\frac{3}{2}}\right)2\,dx$$

$$= \frac{2}{15}(2x+5)(5x+2)^{\frac{3}{2}} + c_1 - \frac{4}{15}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}(5x+2)^{\frac{5}{2}} + c_2\right)\right)$$

$$= \frac{2}{15}(5x+2)^{\frac{3}{2}}\left[(2x+5) - \frac{2}{25}(5x+2)\right] + C$$

$$= \frac{2}{15}(5x+2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{50x+125-10x-4}{25}\right) + C$$

$$= \frac{2}{375}(40x+121)(5x+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

2. $\int (x^2+6)\sqrt{3x+5}\,dx = \int u\,dv$

(x^2+6)	$\sqrt{3x+5}\,dx$
$2x$	$\frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}+c$
2	$\frac{4}{135}(3x+5)^{\frac{5}{2}}+c$
0	$\frac{8}{2835}(3x+5)^{\frac{7}{2}}+c$

$$\int (x^2+6)\sqrt{3x+5}\,dx = \frac{2}{9}(x^2+6)(3x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{8x}{135}(3x+5)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{2835}(3x+5)^{\frac{7}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}\left[(x^2+6) - \frac{4x}{15}(3x+5) + \frac{8}{315}(9x^2+30x+25)\right] + C$$

$$= \frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{315x^2+1890-252x^2-420x+72x^2+240x+200}{315}\right) + C$$

$$= \frac{2}{2835}(135x^2-432x+2090)(3x+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

LATIHAN LANJUT

1. $\int (x^2 - 3x + 2)^2 (2x - 3)dx$
2. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6 dx$
3. $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3)dx$
4. $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12)dx$
5. $\int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 11} dx$

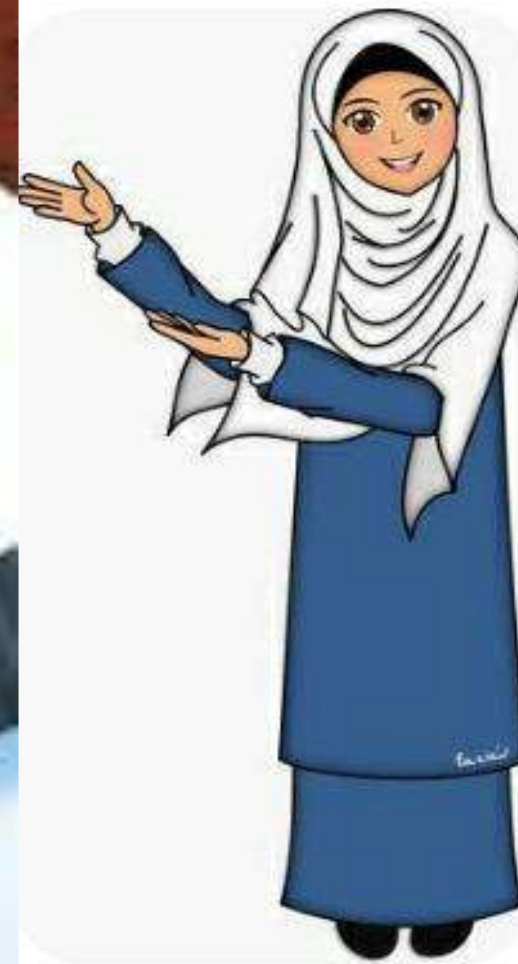
TUT WURI HANDAYANI

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

UNIVERSITAS JAMBI

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA



2021 | Lisani,S.TP.,M.P | Lisani@staff.unja.ac.id | lisani@unja.ac.id | 081363329477