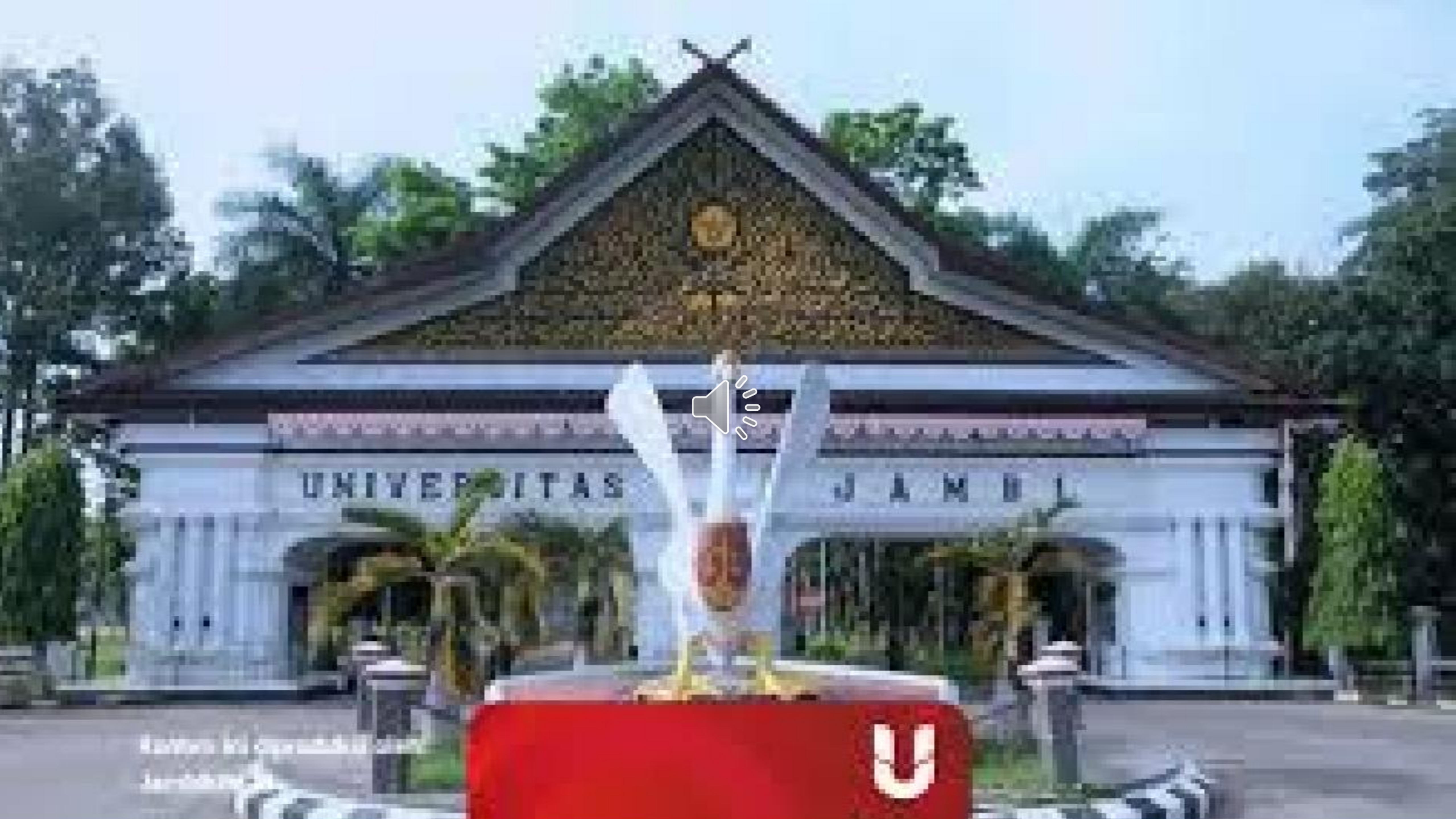
JAMBI


Ilmu Tidak Didapatkan dengan Tubuh yang Santai

Integral Trigonometri

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$f(x) = a \cdot x^n$$

$$\int a \cdot x^n dx = a \cdot \int x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

No.	Fungsi f(x) = y	Turunan	Integral
1	$y = sin\ x$	$cos\ x$	$\int \cos x\, dx = sin\ x + c$
2	$y = cos\ x$	$-\ sin\ x$	$\int \sin x\ dx = -\ cos\ x + c$
3	$y = tan\ x$	$\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = tan\ x + c$
4	$y = cot\ x$	$-\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\ cot\ x + c$
5	$y = sec\ x$	$tan\ x\ .\ sec\ x$	$\int \tan x . \sec x\, dx = sec\ x + c$
6	$y = csc\ x$	$-cot\ x\ .\ csc\ x$	$\int \cot x\ .\ \csc x\, dx = -\ csc\ x + c$
7	$y = \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$cos(ax + b)$	$\int cos(ax + b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$
8	$y = -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$sin(ax + b)$	$\int sin(ax + b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$
9	$y = \frac{1}{a}\tan(ax + b)$	$\sec^2(ax + b)$	$\int \sec^2(ax + b)\ dx = \frac{1}{a}\tan(ax + b) + c$
10	$y = -\frac{1}{a}\cot(ax + b)$	$\csc^2(ax + b)$	$\int \csc^2(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a}\cot(ax + b) + c$
11	$y = -\frac{1}{a}\sec(ax + b)$	$\tan(ax + b)\ .\ \sec(ax + b)$	$\int \tan(ax + b)\ .\ \sec(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a}\sec(ax + b) + c$
12	$y = -\frac{1}{a}\csc(ax + b)$	$\cot(ax + b)\ .\ \csc(ax + b)$	$\int \cot(ax + b)\ .\ \csc(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a}\csc(ax + b) + c$

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

2021 | Lisani,S.TP.,M.P | Lisani@staff.unja.ac.id | lisani@unja.ac.id | 081363329477

INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Bentuk integral yang dicakup disini adalah bentuk integral dari $\int f(x)\, dx$ dengan f(x) merupakan fungsi :

- $\sin^m x \cos^n x$
- $\tan^m x \sec^n x$, $\cot^m x \csc^n x$
- $\tan^m x \cot^n x$
- sin (mx) cos (nx), sin (mx) sin(nx), cos (mx) cos (nx)

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Integral bentuk $\int \cos^n x \, dx$ & $\int \sin^n x \, dx$ dengan n Î B^+.

Misal n bilangan ganjil. Maka $\sin^n x$ dan $\cos^n x$ difaktorkan menjadi $\sin x \sin^{n-1} x$ dan $\cos x \cos^{n-1} x$ dengan (n-1) merupakan bilangan genap. Untuk mencari solusi digunakan identitas $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dan dengan substitusi integrasi.

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Contoh

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right) d\left(\cos x\right) = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\int \sin^3 x \, dx$$

Dg cara Substitusi

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$u = \cos x$$
$$du = -\sin x \, dx$$

$$\int \sin^3 x \, dx = -\int (1 - u^2) du$$
$$= -u + \frac{u^3}{3}$$
$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\int \cos^3 x \, dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2) \, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Sedang untuk n bilangan genap , maka $\sin^n x$ dan $\cos^n x$ diuraikan sehingga menjadi jumlah suku-suku dalam cosinus, yaitu digunakan identitas $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Contoh.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

[1]

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}; \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

$$\therefore \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.
\end{aligned}
$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\int cos^4(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx \\
&= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right] dx \\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x\, dx \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\int \sin^4 x \, dx$$

Integrate: $\int \sin^4 x\,dx$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos(2x))\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}(1+\cos(4x))\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\right) dx$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

Bentuk integral $\int \sin^n x \, dx$ dan $\int \cos^n x \, dx$ dapat juga dihitung dengan rumus reduksi, yaitu integral di atas dinyatakan dalam suku-suku dari integral yang sejenis namun untuk pangkat yang lebih rendah. Disini akan diberikan rumus reduksi untuk $\int \cos^n x \, dx$ sebagai berikut :

Misal $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$, $\quad u = \cos^{n-1} x$ & $dv = \cos x \, dx$. Maka

$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x \, dx$ & $v = \sin x$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Dengan mengunakan metode integral bagian didapatkan :

$$\int \cos^{n} x\, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^{2} x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \left(1 - \cos^{2} x\right) \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \cos^{n} x\, dx$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Bila suku paling kanan dipindahkan ke ruas kiri maka didapatkan:

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

atau

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Dengan cara serupa diperoleh rumus reduksi untuk $\int \sin^n x\,dx$, yaitu :

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

Contoh

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Integral bentuk $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ dengan m,n Î B^+.

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Bila m atau n merupakan bilangan ganjil maka untuk suku yang berpangkat ganjil difaktorkan dengan sin x atau cos x sebagai salah satu faktornya dan digunakan identitas $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Namun bila m dan n keduanya merupakan bilangan genap (m = n) maka digunakan identitas sin 2x = 2 sin x cos x dan $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. Sedang untuk m dan dan n bilangan genap tetapi m ≠ n dapat diselesaikan menngunakan metode yang kita bahas pada bagian selanjutnya dengan identitas dan cara yang digunakan tetap sama seperti bilamana m = n di atas.

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Contoh.

a. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \, d(\cos x)$

$$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

b. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{\sin 4x}{32} + C$$

Integral bentuk $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ & $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$ **dengan n Î** $\mathbf{B^+}$**.**

Untuk m = 1 dan n = 0 kita lakukan integrasi sebagai berikut :

$$\text{(i)} \quad \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{1}{\cos x} d(\sin x) = -\ln(\cos x) + C$$

$$\text{(ii)} \quad \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln(\sin x) + C$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Sedang untuk m = 0 dan n = 1 kita lakukan manipulasi integrasi sebagai berikut:

$$\text{(i)}\ \int \sec x\, dx = \int \sec x\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$\text{(ii)}\ \int \csc x\, dx = -\ln(\csc x + \cot x) + C$$

Untuk atau n = 0 atau m = 0 dapat digunakan rumus reduksi, dengan menggunakan identitas $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ & $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ didapatkan:

(i) $\int \tan^m x\, dx = \int \tan^{m-2} x \tan^2 x\, dx = \int \tan^{m-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) dx$

$$= \int \tan^{m-2} x\, d(\tan x) - \int \tan^{m-2} x\ dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\, dx$$

(ii) $\int \cot^m x\, dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\, dx$

(iii) $\int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx = \int \sec^{n-2} x\, d(\tan x)$

$$= \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx$$

(iv) $\int \csc^n x\, dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x\, dx$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Untuk m ganjil, maka integral akan mudah diselesaikan bila digunakan bentuk d (sec x) = sec x tan x dx atau d (csc x) = - csc x cot x dx dan identitas: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ & $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$. Sedang untuk m genap akan mudah diselesaikan bila kita reduksi ke dalam suku-suku dari sec x atau csc x.

$$\text{(a)}\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\text{(b)}\quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$\text{(c)}\quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

Contoh.

a. $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$

Misal u = sec x. Maka du = sec x tan x dx

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\tan x \sec x) \, dx$$

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^2 x \left(\tan x \sec x\right) dx = \int \left(u^2 - 1\right) u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$$

Misal u = tan x . Maka du = $\sec^2$x dx

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int u^2 \left(u^2 + 1\right) du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

Integral Berbentuk

1. Kombinasi Sin dan Cos

$$\boxed{\operatorname{Sin}^n x . \operatorname{Cos}^m x \, dx}$$

Perhatikan Rumus

$$\boxed{\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1}$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$$

$$\int sin^2 2x\, dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

2021 Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$$

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

2021

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477

2021

Lisani,S.TP.,M.P Lisani@staff.unja.ac.id lisani@unja.ac.id 081363329477